

Th (Taylor Young).

$f \in C^n$ sur I , $a \in I$. Il existe un voisinage V de a tq $\forall x \in V$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Dem: $f \in C^n$ sur $I \rightsquigarrow T_L$ sur $[a, x]$ à l'ordre $n-1$.

$\exists c_x \in]a, x[$ tq $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c_x)$.

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} (f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a))$.

$c_x \in]a, x[$ donc $c_x \xrightarrow{x \rightarrow a} a$.

$f^{(n)}$ continue en a donc $f^{(n)}(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f^{(n)}(a)$

Donc $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} \varepsilon(x)$ $\square$

